

1. cvičení - Otevřené a uzavřené množiny, spojitost

ℒ = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1. Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Určete jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

- | | |
|---|---|
| (a) $M = \{\mathbf{x}\}$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je daný. | (h) $M = (-\infty, +\infty) \subset \mathbb{R}$. |
| (b) $M \subset \mathbb{R}^n$ neprázdná a konečná. | (i) $M = \mathbb{N}$. |
| (c) $M = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. | (j) ℒ $M = \mathbb{Q}$. |
| (d) $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. | (k) $M = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. |
| (e) $M = [0, 1) \subset \mathbb{R}$. | (l) ℒ $M = \{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$. |
| (f) $M = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. | (m) $M = \{[\frac{1}{n}, 0]; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$. |
| (g) $M = [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. | (n) $M = \{[\frac{1}{n}, 0]; n \in \mathbb{N}\} \cup \{[0, 0]\} \subset \mathbb{R}^2$. |

Příklad 2. Je definována funkce $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sin y}, & x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}, y = 0. \end{cases}$

- (a) Ukažte, že funkce f je spojitá v bodě $[0, 0]$ na všech přímkách protínajících bod $[0, 0]$
(b) Ukažte, že funkce f není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Příklad 3. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice dané funkce, nakonec určete, kde je spojitá.

- | | |
|--------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = 2x + 3y + 1$. | (e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$. |
| (b) ℒ $f(x, y) = \min(x, y)$. | (f) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. |
| (c) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$. | (g) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$. |
| (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$. | |

Příklad 4 (Neřešené). Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice dané funkce, nakonec určete, kde je spojitá.

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x, y) = \frac{y}{x}$. | (e) $f(x, y) = \text{sign}(\sin x \cdot \sin y)$. |
| (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$. | (f) $f(x, y) = x + y$. |
| (c) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. | (g) $f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$. |
| (d) $f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$. | |

Pokračování na další straně.



Příklad 5 (Úrovňové množiny). Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.

- (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y \leq 0\}$.
- (b) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$.
- (c) $M =$ jednotková kružnice v $\mathbb{R}^2$ bez bodu $[1, 0]$.
- (d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\}$.
- (e) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 9\}$.
- (f) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + e^y > 17\}$.
- (g) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$.
- (h) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x - y| = x - y\}$.
- (i) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x + y| > x + y\}$.
- (j) $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$.

Příklad 6. Rozhodněte zda jsou zadané množiny otevřené či uzavřené. Najděte jejich vnitřek, hranici a uzávěr. Množiny načrtněte.

- (a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
- (b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x < y < x + 3\}$.
- (c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$.
- (d) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| > 1\}$.

Příklad 7.

- (a) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\text{Int } (A \cup B) \neq \text{Int } A \cup \text{Int } B$.
- (b) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $H(A \cup B) \neq H(A) \cup H(B)$.
- (c) Najděte $A, B \subset \mathbb{R}$, aby $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (d) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (e) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
- (f) Buď $A \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\mathbb{R}^n \setminus \text{Int } (\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{A}$ (a tedy také $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A} = \text{Int } (\mathbb{R}^n \setminus A)$).
- (g) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\text{Int } (A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.
- (h) Buď $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Ukažte, že $\text{Int } (A \cup B) \supset \text{Int } A \cup \text{Int } B$.
- (i) Najděte funkci f , aby pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ byla množina $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ otevřená.
- (j) Najděte spojitou funkci f , aby pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ byla množina $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > c\}$ prázdná a zároveň $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = c\}$ neprázdná. K určení hraničních bodů tedy nepostačuje pouze zkoumat rovnost namísto nerovnosti.
- (k) Najděte spojitou funkci f na $[1, +\infty)$, aby byla množina $\{f(x); x \geq 1\}$ jednobodová. Spojitý obraz neomezené množiny tedy může být omezená (a uzavřená) množina.

